

NETZPLANTECHNIK IM MATHEMATIKUNTERRICHT

von

D. Dorringer (TU Wien)

I. MODELLE DER NETZPLANTECHNIK

Die Netzplantechnik hat die optimale Planung und Überwachung der Ausführung eines Vorhabens (= *Projekt*) zum Gegenstand. Ein Projekt kann ein Bauvorhaben, ein Fertigungsvorhaben, ein Beschaffungsauftrag, ein Entwicklungsprojekt u. ä. sein. Ein Projekt setzt sich aus zeitbeanspruchenden Tätigkeiten bzw. Arbeitsvorgängen (= *Vorgänge*) zusammen, zwischen denen gewisse *Anordnungsbeziehungen* bestehen. Die Anordnungsbeziehungen werden mit Hilfe von gerichteten Graphen (ohne Mehrfachkanten und Schlingen) beschrieben. Dabei unterscheidet man im wesentlichen:

1. Vorgangspfeilnetze

Hierbei werden den Vorgängen (sowohl den realen als auch den künstlich einzuführenden fiktiven Vorgängen) die Pfeile (gerichtete Kanten) eines Graphen zugeordnet; im folgenden identifizieren wir die Vorgänge mit den ihnen zugeordneten Pfeilen. - Hat ein Pfeil A den Anfangspunkt a_1 und den Endpunkt a_2 , so schreiben wir $A = (a_1, a_2)$. Die Anfangs- und Endpunkte der Pfeile sind dann die Repräsentanten aller möglichen Ereignisse, die im Planungsmodell vorkommen. Man beachte, daß dadurch gewisse Ereignisse unter Umständen nicht erfaßt werden; etwa kann es sein, daß bei der Planung des Baus eines Hauses die Ereignisse „1. Stock fertig“ oder „Dachgleiche“ nicht als „Endereignisse“ von Tätigkeiten aufscheinen.

Sind den Vorgängen die Pfeile zugeordnet, geht es darum, die Pfeile in geeigneter Weise „aneinanderzufügen“. Hierbei hängt es davon ab, welche der Beziehungen „Ende-Start“, „Start-Start“, „Start-Ende“ oder „Ende-Ende“ man zu Grunde legt: Fügt man zwei Pfeile $A = (a_1, a_2)$ und $B = (b_1, b_2)$ durch Identifikation von a_2 und b_1 im Sinne einer Ende-Start-Beziehung zusammen (Abb. 1), so bedeutet das, daß der Vorgang B unmittelbar auf den Vorgang A folgt und frühestens beginnen kann, wenn A beendet ist, wohingegen dasselbe bei Zugrundelegung einer Start-Start-Beziehung heißen würde, daß B unmittelbarer Nachfolger von A ist und frühestens beginnen kann, wenn A bereits begonnen hat.

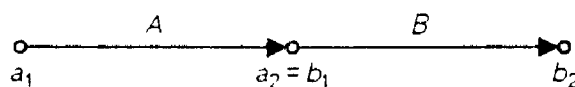


Abb. 1

Beim Aneinanderfügen der Pfeile sind je nach Modellfall eine Reihe von Regeln zu beachten; wir geben hierfür ein Beispiel.

Beispiel 1: Unter der Annahme einer Ende-Start-Beziehung sei die folgende Situation zu erfassen: Ein Vorgang D folge unmittelbar zwei Vorgängen A und B nach. Ein weiterer Vorgang E folge ebenfalls unmittelbar A und B nach, sei darüber hinaus aber noch unmittelbarer Nachfolger eines Vorgangs C (der kein „Vorläufer“ von D ist). In diesem Fall erfolgt die Aneinanderreihung der Pfeile A bis E so wie aus Abb. 2 hervorgeht, wobei zusätzlich ein fiktiver Vorgang (= *Scheinvorgang*; strichliert gezeichnet) eingefügt wird.

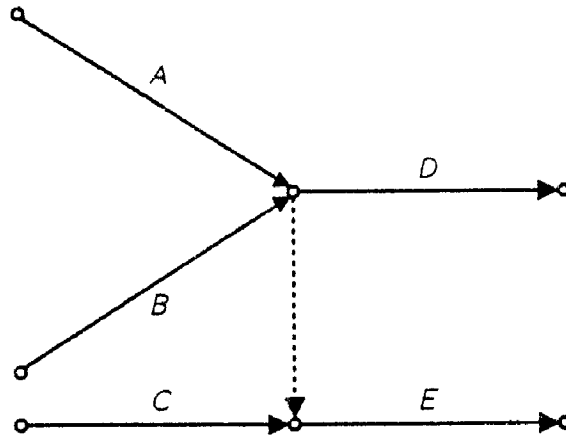


Abb. 2

2. Ereignisknotennetze

Bei diesen stehen die Ereignisse im Vordergrund. Die Ereignisse können – müssen aber nicht – Anfangs- und Endereignisse von Tätigkeiten sein. Den Ereignissen werden die Knoten eines gerichteten Graphen zugeordnet. Im folgenden identifizieren wir die Knoten mit den Ereignissen, welche sie repräsentieren. Folgt ein Ereignis b unmittelbar einem Ereignis a nach, so zeichnet man eine gerichtete Kante von a nach b .

3. Vorgangsknotennetze

Nun werden die Vorgänge den Knoten eines Graphen zugeordnet und anschließend mit diesen identifiziert. Unterstellen wir eine Start-Start-Beziehung, so kann man zum Beispiel auf folgende Weise (bewertete) Pfeile im Graphen einführen: Kann ein Vorgang B frühestens t Zeiteinheiten nach Beginn eines Vorgangs A anfangen, dann zeichnet man einen Pfeil von A nach B und bewertet diesen mit t ; muß B spätestens T Zeiteinheiten nach dem Beginn von A beginnen, so zeichnet man einen Pfeil von B nach A und bewertet diesen mit $-T$.

Wie wir sehen, werden in Netzen die Kanten bewertet. Die Bewertung richtet sich dabei nach der verwendeten Planungsmethode.

Ein Projekt erfordert nicht nur Zeit, sondern verursacht auch Kosten und macht den Einsatz von Betriebsmitteln notwendig. Je nachdem, welcher der genannten Aspekte im Vordergrund steht, unterscheidet man zwischen Zeit- und Terminplanung, Kostenplanung und Kapazitätsplanung (Verteilung von Einsatzmitteln).

A) Zeit- und Terminplanung

a) Deterministische Modelle

Bei diesen sind sowohl der Projektablauf, als auch die Zeitvorgaben, welche für die einzelnen Vorgänge gemacht werden, determiniert. Gesucht werden die kürzeste Gesamtdauer des Projekts, die frühest und spätest möglichen Anfangs- und Endzeitpunkte der einzelnen Vorgänge, Pufferzeiten für die Vorgänge sowie die sog. *kritischen Vorgänge*, das sind Vorgänge, deren Verlängerung unter der Voraussetzung einer kürzest möglichen Projektdauer eine entsprechend große Hinausschiebung des Projektendes verursachen. Die bekanntesten Methoden, welche auf deterministischen Annahmen beruhen, sind CPM (*Critical Path Method*) und MPM (*Metra-Potential-Methode*).

Bei CPM wird von einem Vorgangspfeilnetz mit zu Grunde liegender Ende-Start-Beziehung ausgegangen, und die Pfeile des (nach bestimmten Regeln erstellten) Netzes werden mit den Zeitdauern der einzelnen Vorgänge bewertet, wobei Scheinvorgänge die Bewertung 0 erhalten. Der sich auf diese Weise ergebende Graph wird als *CPM-Netzplan* bezeichnet. Der Netzplan ist derart konstruiert, daß ein schwach zusammenhängender zyklenfreier Graph entsteht, welcher genau eine Quelle, das gemeinsame Anfangsereignis aller „Startvorgänge“, und genau eine Senke, das gemeinsame Endereignis aller „Zielvorgänge“ besitzt.

Auf Grund von verschiedenen Möglichkeiten, Scheinvorgänge einzuführen, ist ein CPM-Netzplan im allgemeinen nicht eindeutig. Er hat überdies auch den Nachteil, daß wegen der Ende-Start-Beziehung zeitliche Maximalabstände zwischen aufeinanderfolgenden Vorgängen nicht berücksichtigt werden können. Letzteres ist etwa bei MPM jedoch möglich.

Ein *MPM-Netzplan* ist ein Vorgangsknotennetz, welches auf Grund einer Start-Start-Beziehung so, wie weiter oben bei den Vorgangspfeilnetzen exemplarisch ausgeführt, konstruiert wird. Der resultierende Netzplan ist schwach zusammenhängend, hat positive und negative Bewertungen und beinhaltet Zyklen; kein Zyklus kann jedoch eine positive Länge haben. Quellen und Senken kommen im allgemeinen nicht vor.

Beispiel 2: Die Vorgänge eines Projekts seien *A, B, C, D, E* und sollen die Zeitdauern 5, 4, 3, 2 und 2 Wochen haben. Zwischen den Vorgängen sollen die in Beispiel 1 beschriebenen Anordnungsbeziehungen bestehen, wobei *A, B* und *C* Startvorgänge, d.h. Vorgänge, denen kein Vorgang vorausgeht, und *D* und *E* Zielvorgänge, d.h. Vorgänge, denen kein Vorgang folgt, seien. Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß keine Mehr-

fachkanten auftreten dürfen, erhält man dann den in Abb. 3 dargestellten CPM-Netzplan (bei dem neben den Pfeilen die Bezeichnungen der Vorgänge und die Vorgangsdauern eingetragen sind).

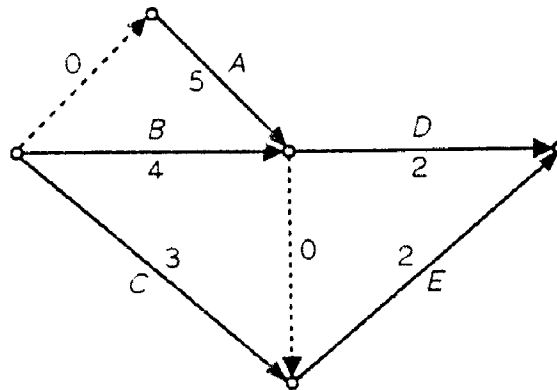


Abb. 3

Verlangt man zusätzlich, daß die Vorgänge *C* und *E* möglichst spät, d.h., soweit dies verschoben in Richtung des Gesamtabschlusses nur geht, beginnen sollen, so kann dies im vorliegenden Netzplan nicht ausgedrückt werden. Der spätest mögliche Beginn von *C* und *E* bedeutet, daß das Projektende zeitlich unmittelbar auf *E* und *E* unmittelbar auf *C* folgen soll, eine Situation, die bei MPM durch die Angabe von jeweils frühestem und spätestem Beginn eines Vorgangs nach Beginn des unmittelbaren Vorgängers beschreibbar ist. Wegen des Zusammenhanges „Endzeitpunkt eines Vorgangs - Vorgangsdauer = Startzeitpunkt des Vorgangs“ ist bei MPM auch jede Ende-Start-Beziehung erfaßbar. Nach Einführung eines Startvorgangs *S* und eines Zielvorgangs *Z* der jeweiligen Zeitdauer 0 erhält man unter Berücksichtigung der Zusatzforderung für Beispiel 2 den in Abb. 4 dargestellten MPM-Netzplan.

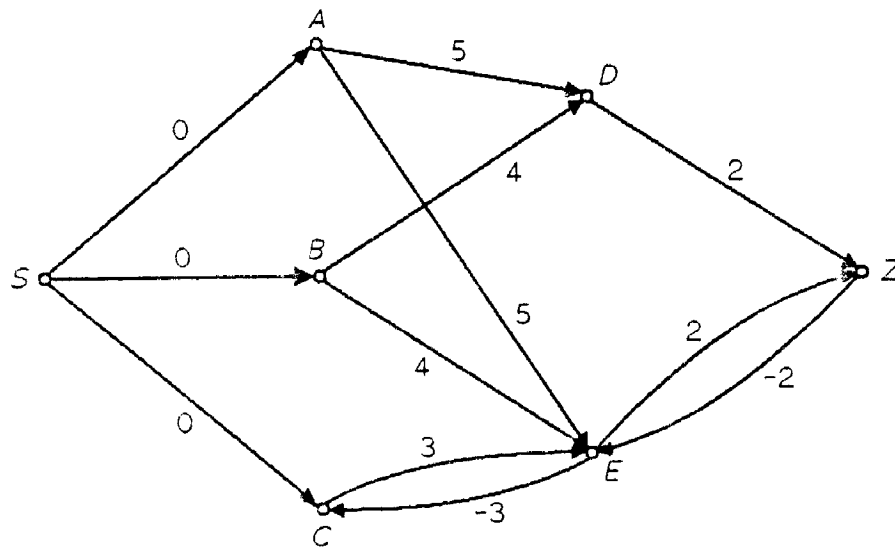


Abb. 4

Der Einheitlichkeit halber wollen wir annehmen, daß die Knoten in jedem CPM- und MPM-Netzplan von 1 bis n durchnummeriert sind, wobei bei CPM-Netzplänen 1 die Quelle und n die Senke, bei MPM-Netzplänen 1 der Start- und n der Zielvorgang sei. Bei CPM bezeichnen wir die Dauer eines Vorgangs (i,j) mit D_{ij} , bei MPM schreiben wir D_i für die Dauer des Vorgangs i .

Gemeinsames Ziel bei CPM und MPM ist es, die frühest und spätest möglichen Anfangs- und End(= Abschluß-)Zeitpunkte für die einzelnen Vorgänge zu berechnen.

FAZ_{ij} , FEZ_{ij} , SAZ_{ij} bzw. SEZ_{ij} stehe bei CPM für den frühest möglichen Anfangs-, frühest möglichen End-, spätest möglichen Anfangs- und spätest möglichen Endzeitpunkt des Vorgangs (i,j) ; bei MPM sollen die entsprechenden Parameter für den Vorgang i (Vorgänge werden bei MPM durch Knoten repräsentiert!) FAZ_i , FEZ_i , SAZ_i , SEZ_i sein. Bei CPM sind die vier angeführten Parameter wegen der eindeutig festliegenden Vorgangsdauern D_{ij} bestimmt durch die Größen $FZ_i (=FAZ_{ij})$ und $SZ_i (=SAZ_{ij})$, dem frühest möglichen Zeitpunkt für den Eintritt des Ereignisses i bzw. dem spätest möglichen Eintrittszeitpunkt von j ; bei MPM genügt es wegen $FEZ_i = FAZ_i + D_i$ und $SEZ_i = SAZ_i + D_i$ die Größen FAZ_i und SAZ_i zu kennen.

Es ist unschwer - auch heuristisch - einzusehen, daß für CPM-Netzpläne unter der Voraussetzung $FZ_1 = 0$ gilt

$$\begin{aligned} FZ_i &= \text{Länge eines längsten Weges von 1 nach } i, \\ SZ_j &= SZ_n - \text{Länge eines längsten Weges von } j \text{ nach } n. \end{aligned}$$

Unter Weg werde stets ein gerichteter Weg (= Pfad) verstanden.

Etwas schwieriger einzusehen - jedoch auch heuristisch plausibel zu machen - ist, daß bei MPM (trotz negativer Kantenbewertungen) in analoger Weise unter der Annahme $FAZ_1 = 0$ gilt

$$\begin{aligned} FAZ_i &= \text{Länge eines längsten Weges von 1 nach } i, \\ SAZ_i &= SAZ_n - \text{Länge eines längsten Weges von } i \text{ nach } n. \end{aligned}$$

Von den üblicherweise betrachteten Pufferzeiten ist der *Gesamtpuffer* der wichtigste. Dieser gibt die maximale Zeitspanne an, um die man einen Vorgang verschieben kann, ohne die Gesamtprojektdauer zu verlängern, unter der Voraussetzung, daß alle dem Vorgang vorangehenden Tätigkeiten zu ihrem frühest möglichen Endzeitpunkt abgeschlossen sind und alle noch nachfolgenden Tätigkeiten zu ihrem spätest möglichen Zeitpunkt beginnen. Der Gesamtpuffer ist bei CPM gegeben durch $GP_{ij} = SZ_j - FZ_i - D_{ij}$ und bei MPM durch $GP_i = SAZ_i - FAZ_i$. Ein Vorgang (i,j) bzw. i ist genau dann kritisch, falls

$$GP_{ij} = \min_{(s,t)} GP_{st} = SZ_1 \quad \text{bzw.} \quad GP_i = \min_s GP_s = SEZ_1,$$

wobei die Minima über alle Pfeile (s,t) bzw. Knoten s zu erstrecken sind. Fordert man - was wir im folgenden neben $FZ_1 = FAZ_1 = 0$ stets annehmen wollen - daß die Gesamt-

projektdauer T die kürzest mögliche Dauer T_0 ist, so ist $SZ_1 = 0$ bzw. $SEZ_1 = 0$ und daher ein Vorgang kritisch genau dann, wenn sein Gesamtpuffer gleich 0 ist.

b) Nicht-deterministische Modelle

Ist der Projektablauf determiniert, sind aber die Zeitdauern der Vorgänge Zufallsvariablen, dann wird die Planung zumeist mit Hilfe von PERT (*Program Evaluation and Review Technique*) durchgeführt.

Bei PERT geht man von einem Ereignisknotennetz aus und ordnet zunächst jedem Pfeil (i, j) , welcher tatsächliche Tätigkeiten repräsentiert, drei Schätzwerte für die Zeitdauer dieser Tätigkeiten zu: einen optimistischen Schätzwert OD_{ij} , einen höchstwahrscheinlichen Wert HD_{ij} und einen pessimistischen Schätzwert PD_{ij} . Bei reinen „Ordnungspfeilen“ (welche keine realen Vorgänge darstellen) setzt man diese drei Werte gleich 0. Man nimmt an, daß die Vorgangsdauern D_{ij} betaverteilt sind und berechnet unter der (etwas willkürlichen) Festsetzung, daß für die beiden Parameter α und β in der Betaverteilung gilt $\alpha + \beta = 4$, die Erwartungswerte (mittlere Dauern) MD_{ij} und die Varianzen VD_{ij} der D_{ij} . Es ergibt sich dabei

$$MD_{ij} = \frac{1}{6} (OD_{ij} + 4HD_{ij} + PD_{ij}),$$

und für die Varianzen erhält man näherungsweise

$$VD_{ij} \approx \frac{1}{36} (PD_{ij} - OD_{ij})^2.$$

Sodann bewertet man die Pfeile (i, j) mit den Paaren MD_{ij} und VD_{ij} .

Anschließend verfährt man genauso wie bei CPM, wobei man an Stelle der D_{ij} mit den MD_{ij} rechnet und für die FZ_i und SZ_j die Erwartungswerte (Mittelwerte) MFZ_i und MSZ_j nimmt. Für den Gesamtpuffer GP_{ij} wird der Mittelwert MGP_{ij} genommen.

Zur Bestimmung von Weglängen und deren Varianzen werden die Erwartungswerte MD_{ij} und Varianzen VD_{ij} entlang eines Weges aufsummiert. Als Länge eines längsten Weges zwischen zwei Knoten nimmt man dann das Maximum der Längen aller Weglängen, welche man auf diese Weise erhält, und für die Varianz der Länge eines längsten Weges das Maximum der Varianzen aller Weglängen.

Es sei bemerkt, daß die letztgenannte Vorgangsweise eine mathematisch unzulässige Vertauschung zwischen Erwartungswert und Maximierung darstellt, und daß die Aufsummierung von Varianzen entlang von Wegen nur dann gerechtfertigt ist, falls die Vorgänge entlang von Wegen paarweise unkorreliert sind.

Sind die MFZ_i und MSZ_j sowie die Varianzen der FZ_i und SZ_j bestimmt, nimmt man bei PERT an, daß die FZ_i und SZ_j normalverteilt mit den erhaltenen Werten als Parameter sind und kann dann Wahrscheinlichkeiten für Terminüber- und Unterschreitungen berechnen. Dies setzt allerdings voraus, daß die Prämissen des Zentralen Grenzwertsatzes erfüllt sind, was in der Praxis zumeist wenig zutreffend ist.

Auf Grund der geschilderten Unzulänglichkeiten ist bei der Anwendung von PERT größte Vorsicht geboten! Es können Fehler entstehen, die bis zu 30% und mehr ausmachen.

Ist bei einem Projekt der Projektablauf nicht determiniert, sondern kann man sich während der Ausführung des Projekts jeweils für eine von mehreren Möglichkeiten entscheiden, was bei Entwicklungsprojekten oft der Fall ist, so arbeitet man vielfach mit *Entscheidungsnetzplänen*. Bei diesen wird dann insbesondere nach der Wahrscheinlichkeit für das Eintreten bestimmter Zielereignisse sowie der wahrscheinlichst kürzesten Zeitdauer dafür gefragt. Eine der bekanntesten Planungsmethoden für solche Problemsituationen - auf welche wir allerdings hier nicht weiter eingehen werden - ist GERT (*Graphical Evaluation and Review Technique*).

B) Kostenplanung

Ausgangspunkt der Kostenplanung ist ein CPM-Netzplan mit variablen Vorgangsdauern D_{ij} . Für jeden Vorgang (i, j) ist eine konvexe Kostenfunktion $K_{ij} = K_{ij}(D_{ij})$ mit bekanntem Definitionsbereich $[MIND_{ij}, ND_{ij}]$ gegeben. Dabei bezeichnet $MIND_{ij}$ die Mindestdauer und ND_{ij} die „Normalvorgangsdauer“. Für $D_{ij} > ND_{ij}$ ist die Funktion insofern nicht von Interesse, als eine insgesamt länger dauernde und zugleich (gegenüber einer normalen Durchführungsdauer) teurere Projektvariante bei der Optimierung von vornherein außer Acht gelassen werden kann. Für K_{ij} wählt man häufig eine lineare Funktion $K_{ij} = -b_{ij} D_{ij} + c_{ij}$ mit $b_{ij}, c_{ij} \geq 0$ (und $b_{ij} ND_{ij} < c_{ij}$); für Scheinvorgänge ist $b_{ij} = c_{ij} = 0$.

Die Summe aller Vorgangskosten nennt man *direkte Projektkosten*, Kosten, die als Funktion der Gesamtprojektdauer anfallen (wie z.B. Verwaltungskosten und Pönale) werden als *indirekte Projektkosten* bezeichnet. Die zwei wichtigsten Aufgabenstellungen der Kostenplanung sind, wenn wir einmal von den indirekten Projektkosten absehen:

- Die Bestimmung der minimalen direkten Projektkosten und der Projekttermine in Abhängigkeit von der Projektdauer T , wobei T als variabel angenommen werden kann oder fest vorgegeben ist.
- Die Bestimmung der minimalen direkten Projektdauer bei vorgegebenen Projektkosten K_0 , welche nicht überschritten werden dürfen.

Bezeichnen wir - in beiden Fällen - den unbekanntem Eintrittszeitpunkt des Ereignisses i mit Z_i und schreiben E für die Gesamtheit aller Pfeile des Netzplans, so können wir unter der Annahme linearer Kostenfunktionen die Aufgaben a) und b) wie folgt als Optimierungsprobleme formulieren:

$$\begin{aligned} \text{a) } \quad & \sum_{(i,j) \in E} (-b_{ij} D_{ij} + c_{ij}) = \min! \\ & Z_j - Z_i - D_{ij} \geq 0 \quad \text{für } (i,j) \in E \\ & MIND_{ij} \leq D_{ij} \leq ND_{ij} \quad \text{für } (i,j) \in E \\ & Z_1 = 0, \quad Z_n = T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \quad & T = Z_n = \min! \\ & Z_j - Z_i - D_{ij} \geq 0 \quad \text{für } (i,j) \in E \\ & MIND_{ij} \leq D_{ij} \leq ND_{ij} \quad \text{für } (i,j) \in E \\ & Z_1 = 0 \\ & \sum_{(i,j) \in E} (-b_{ij} D_{ij} + c_{ij}) \leq K_0 \end{aligned}$$

Bei a) handelt es sich um ein sog. parametrisches lineares Optimierungsproblem, welches für fest vorgegebene Werte T_0 von T in ein lineares Optimierungsproblem übergeht; b) ist eine lineare Optimierungsaufgabe. Addiert man zu den direkten Projektkosten die indirekten Projektkosten, so bleibt im Fall von linearen indirekten Projektkosten der Charakter der Aufgaben erhalten; bei nichtlinearen Kosten kann jedoch eine wesentliche Komplizierung eintreten.

C) Kapazitätsplanung

Bei der Kapazitätsplanung befaßt man sich damit, beschränkt zur Verfügung stehende Einsatzmittel möglichst gleichmäßig auf die Vorgänge eines Projekts zu verteilen, sodaß die damit verbundenen Kosten minimal werden. Die Kapazitätsplanung darf nicht mit der Ressourcensummierung verwechselt werden, welche bei Methoden der Zeit- und Terminplanung häufig durchgeführt wird und darin besteht, zusammenzurechnen, welche Einsatz- und Geldmittel bei einer optimalen Zeitplanung in einem gewissen Zeitraum erforderlich sind.

Bei der Kapazitätsplanung geht man von einem CPM-Netzplan aus (wobei die Vorgangsdauern D_{ij} eventuell noch als frei wählbare Parameter angesehen werden können). Ferner wählt man eine diskrete Zeitachse, d. h., man rechnet nur mit ganzzahligen Vielfachen einer Zeiteinheit. Gegeben sind dann im allgemeinen die Projektdauer T (selbst diese wird gelegentlich noch als frei wählbar angesehen), der Einsatzmittelbedarf für (i,j) pro Zeiteinheit und die insgesamt verfügbare Einsatzmittelkapazität pro Zeiteinheit zwischen den Zeitpunkten $t-1$ und t , $t=1, \dots, T$.

Gesucht werden die Anfangszeitpunkte AZ_{ij} der Vorgänge (i,j) , sodaß die Summe aus *Nivellierungskosten*, das sind die Kosten, die über die Zeit hinweg durch gleichmäßige Ausnutzung der verfügbaren Einsatzmittelkapazitäten entstehen, und aus direkten Projektkosten minimal wird. Die Nivellierungskosten werden dabei auf verschiedene Weise, zumeist durch Mittelbildung festgelegt.

Wichtigste Hilfsgrößen bei der Modellierung sind Variable $x_{ij,t}$, welche definiert werden durch

$$x_{ij,t} = \begin{cases} 1, & \text{falls } (i,j) \text{ zwischen } t-1 \text{ und } t \text{ ausgeführt wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Alle Parameter, alle Nebenbedingungen und die Zielfunktion werden durch die $x_{ij,t}$ ausgedrückt. Die Anfangszeitpunkte AZ_{ij} etwa sind durch die $x_{ij,t}$ charakterisierbar durch:

$$x_{ij,t} = 1 \Leftrightarrow t - D_{ij} \leq AZ_{ij} \leq t - 1.$$

Das auf die beschriebene Weise formulierte Problem ist eine sog. binäre Optimierungsaufgabe, welche eine sehr große Anzahl von Veränderlichen und Restriktionen hat. Es sei bereits hier erwähnt, daß eine derartige Aufgabe mit den Standardverfahren der ganzzahligen Optimierung im allgemeinen nicht lösbar ist und daß man nur heuristische Lösungsverfahren zur Verfügung hat, auf welche wir allerdings - auch im folgenden - nicht weiter eingehen werden.

II. LÖSUNGSVERFAHREN

A) Bei der Zeit- und Terminplanung

Wie wir in Abschnitt I gesehen haben, geht es bei Planungen mittels CPM, PERT und MPM rein mathematisch gesehen jedesmal um das Folgende: Gegeben ist ein schwach zusammenhängender Graph G mit Knotenmenge $V = \{1, \dots, n\}$, Kantenmenge E und einer Kantenbewertung $b : E \rightarrow \mathbb{R}$. Die Knoten 1 und n haben wir ausgezeichnet: bei CPM und PERT sind 1 und n die (einzige) Quelle bzw. (einzige) Senke von G , bei MPM stellen 1 und n den Projektbeginn bzw. das Projektende dar. G ist so konstruiert, daß es von 1 zu jedem $i \in V$ und von jedem $i \in V$ nach n stets einen (gerichteten) Weg gibt. Gesucht werden in allen Fällen die Wege von 1 nach i bzw. i nach n , welche von größter Länge sind.

Hat G , so wie dies bei MPM der Fall ist, keine Zyklen positiver Länge, und ist überdies die Bewertungsfunktion b beliebig, so existieren zur Bestimmung der längsten Wege effektive Algorithmen, etwa das *Verfahren von FORD* und der *Tripel-Algorithmus von FLOYD und WARSHALL*. Diese eignen sich allerdings nicht für den Unterricht, sodaß man in der Schule nur in solchen Fällen eine vollständige Analyse mit MPM durchführen können wird, bei denen eine Bestimmung längster Wege mittels "trial and error", also durch gezieltes Probieren, möglich ist, d. h., nur bei Netzplänen mit nicht allzuvielen Vorgängen.

Anders hingegen verhält es sich, wenn G ein nicht-negativ bewerteter, zyklensfreier Graph ist, so wie dies bei CPM und PERT zutrifft. Hier bieten sich zwei Verfahren an, welche auch in der Schule besprochen werden können: Der *DIJKSTRA-Algorithmus* zur Bestimmung der kürzesten und längsten Wege zwischen zwei Knoten eines (nicht notwendigerweise zyklensfreien) Graphen und das folgende Verfahren:

Da G genau eine Quelle und eine Senke besitzt, kann G (*topologisch*) *knotensortiert* werden, d. h., es kann die Knotenmenge $V = \{1, 2, \dots, n\}$ ggf. so umsortiert werden, daß nur Pfeile (i, j) vorkommen mit $i < j$. Die Knotensortierung kann dabei folgendermaßen durchgeführt werden:

- (1) Streiche in G die Quelle (die bei uns nach Voraussetzung die Nummer 1 hat, welche sie auch behalten soll) und alle Pfeile, die davon ausgehen; der so entstehende Graph sei G_1 .
- (2) Wegen der Zyklensfreiheit von G und damit von G_1 enthält G_1 mindestens eine Quelle q . Gebe q die Nummer 2 und streiche alle Pfeile mit Anfangspunkt q ; der so entstehende Graph sei G_2 .
- (3) Wegen der Zyklensfreiheit von G_1 und damit von G_2 enthält G_2 mindestens eine Quelle r . Gebe r die Nummer 3 und streiche alle Pfeile mit Anfangspunkt r ; der so entstehende Graph sei G_3 .

So fährt man nun fort, bis man bei der Senke n angelangt ist.

Ist G knotensortiert, so läßt sich der längste Weg von 1 nach i sehr einfach mit Hilfe des Algorithmus von BELLMAN iterativ berechnen:

Sei d_i die Länge eines (jeden) längsten Weges von 1 nach i und bezeichne P_i die Menge aller Knoten v von G , für die ein Pfeil (v,i) existiert. Auf Grund des BELLMANschen Optimalitätsprinzips der Dynamischen Optimierung gilt dann

$$(*) \quad d_i = \max_{v \in P_i} (d_v + D_{vi}) \text{ für } i=2,3,\dots,n,$$

wobei $d_1=0$ gesetzt wird. Die Menge aller $v \in P_i$, bei welchen das Maximum in $(*)$ angenommen wird, sei M_i .

Beginnend mit $i=0$ gestattet die Gleichung $(*)$ nacheinander alle d_i und M_i zu berechnen. Um einen längsten Weg von 1 nach i zu finden, wählt man ein $i_1 \in M_i$, dann ein $i_2 \in M_{i_1}$, ein $i_3 \in M_{i_2}$ usw. aus, bis man bei $i_r=1 \in M_2$ angelangt ist. $1, i_{r-1}, i_{r-2}, \dots, i_1, i$ ist dann ein längster Weg von 1 nach i .

Beispiel 3: Bezeichnen wir die Knoten des in Abb. 3 dargestellten Netzplans, so wie aus Abb. 5 hervorgeht.

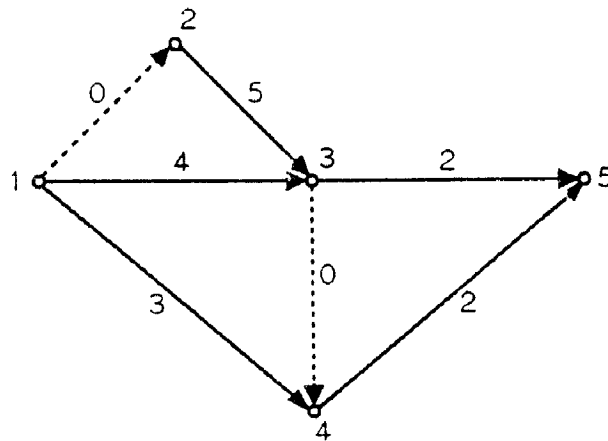


Abb. 5

Der Netzplan ist dann knotensortiert und der obige Algorithmus ergibt:

$$d_1 = 0$$

$$d_2 = \max_{v \in P_2} (d_v + D_{v2}) = \{d_1 + D_{12}\} = 0$$

$$M_2 = \{1\}$$

$$d_3 = \max_{v \in P_3} (d_v + D_{v3}) = \max \{d_1 + D_{13}, d_2 + D_{23}\} = \max \{4, 5\} = 5$$

$$M_3 = \{2\}$$

$$d_4 = \max_{v \in P_4} (d_v + D_{v4}) = \max \{d_1 + D_{14}, d_3 + D_{34}\} = \max \{3, 5\} = 5$$

$$M_4 = \{3\}$$

$$d_5 = \max_{v \in P_5} (d_v + D_{v5}) = \max \{d_3 + D_{35}, d_4 + D_{45}\} = \max \{7, 7\} = 7$$

$$M_5 = \{3, 4\}$$

Bei CPM (und PERT) ist insbesondere jeder längste Weg von 1 nach n von Interesse, da dessen Pfeile nur aus kritischen Vorgängen bestehen (*kritischer Weg*). Die Länge eines jeden kritischen Weges gibt die kürzeste Projektdauer wieder. Bei obigem Beispiel gibt es zwei kritische Wege der Länge 7, nämlich - von hinten nach vorne: 5, 3, 2, 1 und 5, 4, 3, 2, 1.

Die Längen d_i stellen bei CPM die frühest möglichen Zeitpunkte FZ_i für den Eintritt des Ereignisses i dar. Für die spätest möglichen Zeitpunkte SZ_i des Eintritts von i gilt: $SZ_i = SZ_n - \text{Länge eines längsten Weges von } i \text{ nach } n$. (Bei PERT gilt das gleiche für die jeweiligen Mittelwerte.) Die Länge d_i' eines (jeden) längsten Weges von i nach n läßt sich ebenfalls mit Hilfe des Algorithmus von BELLMAN berechnen: Man braucht sich bloß (bei Beibehaltung der Knotennummern) alle Pfeile von G umgedreht zu denken, wobei aus der Menge P_i der „Vorgänger“ von i die Menge S_i der „Nachfolger“ von i wird, und erhält dann, beginnend mit $d_n' = 0$, $d_i' = \max_{\omega \in S_i} (d_\omega' + D_{i\omega})$ für $i = n-1, n-2, \dots, 1$. Da $d_i' = SZ_n - SZ_i$ folgt $SZ_i = SZ_n - \max_{\omega \in S_i} (SZ_n - SZ_\omega + D_{i\omega}) = \min_{\omega \in S_i} (SZ_\omega - D_{i\omega})$ für $i = n-1, n-2, \dots, 1$. Damit hat man eine Gleichung zur iterativen Berechnung der SZ_i . Unter der Annahme, daß das Projekt in der kürzest möglichen Zeit $T_0 = FZ_n$ durchgeführt wird, ist der Iterationsanfang $SZ_n = FZ_n$. Bei dem CPM-Netzplan aus Abb. 5 ergibt sich damit:

$$SZ_5 = 7$$

$$SZ_4 = \min_{\omega \in S_4} \{SZ_\omega - D_{4\omega}\} = \min \{SZ_5 - D_{45}\} = 5$$

$$SZ_3 = \min_{\omega \in S_3} \{SZ_\omega - D_{3\omega}\} = \min \{SZ_5 - D_{35}\} = 5$$

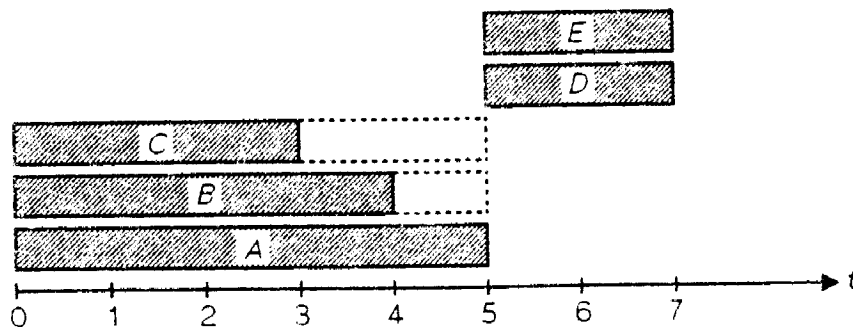
$$SZ_2 = \min_{\omega \in S_2} \{SZ_\omega - D_{2\omega}\} = \min \{SZ_3 - D_{23}\} = 0$$

$$SZ_1 = \min_{\omega \in S_1} \{SZ_\omega - D_{1\omega}\} = \min \{SZ_2 - D_{12}, SZ_3 - D_{13}, SZ_4 - D_{14}\} = \min \{0, 1, 2\} = 0$$

Damit erhält man für den CPM-Netzplan die folgenden Termine:

Aktivität	Kante	Dauer	FAZ_{ij}	FEZ_{ij}	SAZ_{ij}	SEZ_{ij}	GP_{ij}
A	(2,3)	5	0	5	0	5	0
B	(1,3)	4	0	4	1	5	1
C	(1,4)	3	0	3	2	5	2
D	(3,5)	2	5	7	5	7	0
E	(4,5)	2	5	7	5	7	0

Die gefundenen Ergebnisse können übersichtlich in Form eines Balkendiagramms (*GANTT-Diagramms*) dargestellt werden. Bei diesem wird über einer Zeitachse mit der Abszisse t für jeden Vorgang (i,j) ein Balken errichtet, der zum Zeitpunkt $t = FZ_i$ beginnt und bis zum Zeitpunkt $t = FZ_i + D_{ij}$ reicht. Hat (i,j) eine positive Pufferzeit GP_{ij} , so wird der Balken um GP_{ij} strichliert verlängert. Bei unserem Beispiel ergibt sich damit das folgende Diagramm:



Was die Planungsmethode PERT betrifft, so kommt zu der auf dieselbe Weise wie oben beschriebenen Berechnung der MFZ_j und MSZ_j ; noch die Berechnung der Varianzen der FZ_j und SZ_j hinzu, welche in einem erfolgen kann, worauf wir hier aber nicht genauer eingehen.

B) Bei der Kostenplanung

Zur Lösung des in Abschnitt I vorgestellten Modells a) (parametrisches lineares Optimierungsproblem) verwendet man vielfach das *Verfahren von KELLY*, welches auch zur Lösung von Modell b) (nichtparametrisches lineares Programm) herangezogen werden kann. Das Verfahren eignet sich aber nicht für die Schule.

Für spezielle Werte T_0 geht Modell a) in eine lineare Optimierungsaufgabe über, welche so wie Problem b) auch mit Hilfe des Simplexverfahrens gelöst werden kann. Sofern der Netzplan nicht allzuvielen Knoten hat, bietet sich hier eine Möglichkeit für den Schulunterricht.

III. DIDAKTISCHE BEMERKUNGEN

Der einfachste Fall für das Aufstellen eines Netzplanes liegt vor, wenn eine Ereignisliste gegeben ist, zu der ein Ereignisknotennetz konstruiert wird. Geht man von einer Vorgangsliste aus, so muß die Planungssituation erst dahingehend durchleuchtet werden, ob man mit einer Ende-Start-Beziehung auskommt (CPM-Netzplan) oder etwa eine Start-Start-Beziehung zu unterlegen ist (MPM-Netzplan). In beiden Fällen wird es im Unterricht sicherlich günstig sein, den Netzplan an Hand von vorgegebenen formalen Regeln aufzustellen und eine vorwiegend intuitive Vorgangsweise eher hintanzustellen. Die größte Gefahr einer Mißinterpretation von CPM-Netzplänen scheint darin zu bestehen, daß der Netzplan als „Zeitnetz“ aufgefaßt wird, d. h., daß Wege im Netzplan quasi als Zeitachsen angesehen werden, was nur im Fall eines kritischen Weges bei kürzester Projektdauer als vorgegebenes Projektende richtig ist. Bei MPM-Netzplänen ist die Gefahr auf Grund des höheren Abstraktionsniveaus eines Vorgangsknotennetzes nicht mehr so groß.

Ein Charakteristikum von *MPM-Netzplänen* ist, daß auch Maximalabstände zwischen aufeinanderfolgenden Vorgängen erfaßt werden können, was sich in negativen Kantenbewertungen niederschlägt. Obgleich in der Schule dann keine geeigneten Lösungsverfahren zur Verfügung stehen und man sich auf heuristische Lösungsverfahren beschränken muß, ist das Studium von MPM-Netzplänen im Sinne der Besprechung von „Beziehungsstrukturen“ aber auf jeden Fall bedeutsam.

Verzichtet man bei MPM auf die (ganz wesentliche) Möglichkeit, zeitliche Maximalabstände zu erfassen, sodaß alle Kantenbewertungen nicht-negativ sind, so stehen im Unterricht für MPM dieselben Methoden wie für CPM zur Verfügung, allerdings wird man dann CPM insofern den Vorzug geben, als der entsprechende CPM-Netzplan weniger Knoten und Kanten enthält (vgl. Abb. 3 und 4).

Was die *CPM-Netzpläne* betrifft, so gibt es sowohl bei der Zeitplanung als auch bei der Kostenplanung Algorithmen, welche sich für den Unterricht eignen und die – wie wir weiter unten sehen werden – auf verschiedenen Anspruchsniveaus besprochen werden können.

Im Hinblick auf *PERT-Netzpläne* ist zu sagen, daß sie wohl sehr einfach aufzustellen sind und daß das Rechnen bei PERT nicht um vieles aufwendiger ist als bei CPM, daß aber auf Grund der bereits in Abschnitt II gemachten Vorbehalte von einer Verwendung im Unterricht ohne einhergehende entsprechende Kritik eher abzuraten ist.

Die *Zeitplanung mit CPM* läßt in der Schule unterschiedliche Zielsetzungen und Anspruchsniveaus zu:

Der *einfachste Fall* ist, daß alle kritischen Wege und die kürzeste Projektdauer zu bestimmen sind. Dies kann bei sehr kleinen Netzplänen sogar rein empirisch geschehen. Im Regelfall wird man als Parameter die Zeitpunkte FZ_i einführen, die FZ_i als längste Wege von der Quelle nach i interpretieren und anschließend iterativ berechnen. Es gibt aber auch die Möglichkeit, zum selben Ziel mit Hilfe der *Linearen Optimierung* zu gelangen (was allerdings mehr von theoretischem Interesse ist):

Sei $x_{ij} = 1$, falls der Pfeil (i,j) kritisch ist und 0 sonst. Dann lautet die Aufgabe, formuliert als lineares Programm, wobei E die Menge aller Pfeile des Netzplans bezeichnet und P_j für die Menge der Vorgänger und S_j für die Menge der Nachfolger des Knoten j steht:

$$\begin{aligned} \sum x_{ij} D_{ij} &= \max! \\ x_{ij} &\in \{0,1\} \text{ für } (i,j) \in E \\ \sum_{i \in P_j, k \in S_j} (x_{ij} - x_{jk}) &= \begin{cases} -1 & \text{falls } j = 1 \\ 0 & \text{falls } j \neq 1, n \\ 1 & \text{falls } j = n \end{cases} \quad \text{für } j \in \{1,2, \dots, n\} \end{aligned}$$

Die letzten n Nebenbedingungen stellen sicher, daß ein kritischer Weg keine Unterbrechungen aufweist (vgl. Abb. 6). – Man kann beweisen, daß das Simplexverfahren unter den Bedingungen $x_{ij} \geq 0$ (an Stelle von $x_{ij} \in \{0,1\}$) für $(i,j) \in E$ stets nur Lösungen aus $\{0,1\}$ liefert, sodaß kein ganzzahliges Verfahren vonnöten ist.

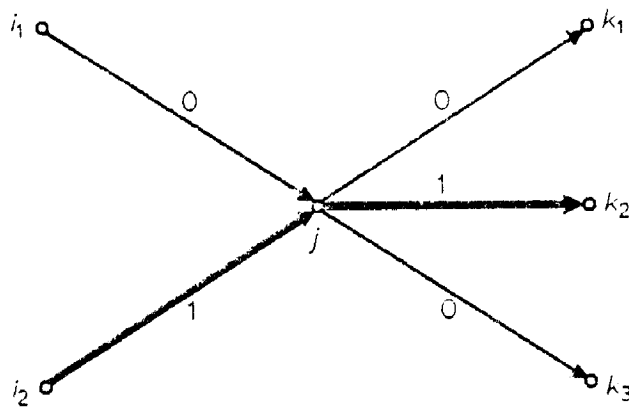


Abb. 6

Will man eine *vollständige CPM-Analyse* durchführen, sind noch die Parameter SZ_j zu berechnen. Ist einmal der BELLMANsche Algorithmus in einem knotensortierten Netzplan zur Bestimmung der FZ_j klargemacht, sollte auch die Berechnung der SZ_j mit Hilfe dieses Algorithmus keine wesentliche Schwierigkeit mehr bedeuten. Von der Verwendung des universelleren DIJKSTRA-Algorithmus bloß zur Umgehung einer eventuellen Hürde bei der Ausdehnung des BELLMANschen Verfahrens auf die Berechnung der SZ_j ist eher abzuraten, da der DIJKSTRA-Algorithmus komplizierter und für das Verständnis der Schüler schwieriger ist. Sind - auf die eine oder andere Art - alle notwendigen Berechnungen durchgeführt, so kommt einer graphischen Interpretation - speziell im Unterricht - besondere Bedeutung zu.

Die Besprechung der auf CPM-Netzplänen fußenden *Kostenplanung* ist auf die weiter oben beschriebene Weise unter Zuhilfenahme des Simplexverfahrens im Unterricht dann ohne weiteres möglich, falls der Simplexalgorithmus den Schülern bekannt ist oder implizit als "black box" am Computer zur Verfügung steht.

Literaturhinweise

Altrogge G.: *Netzplantechnik*.

Verlag Th. Gabler, Wiesbaden (1979).

Gewald K., Kasper K. und Schelle H.: *Netzplantechnik*.

Oldenburg-Verlag, München-Wien (1979).

Golenko D. T.: *Statistische Methoden der Netzplantechnik*.

Teubner-Verlag, Stuttgart (1972).

Küpper W., Lüder K. und Streitferdt L.: *Netzplantechnik*.

Physika-Verlag, Würzburg-Wien (1975).

Neumann K.: *Operations Research Verfahren, Bd. III*.

Carl Hauser-Verlag, München Wien (1975).

Zimmermann H. J.: *Netzplantechnik*.

Sammlung Göschen Bd. 4011, W. de Gruyter-Verlag, Berlin (1971).

Anschrift des Verfassers

Dietmar Dorninger

Institut für Algebra und Diskrete Mathematik

Technische Universität Wien

Wiedner Hauptstraße 8-10

A-1040 Wien